ACADEMIE DE NANCY-METZ

UNIVERSITE DE NANCY II — Durée : 4 heures

I. C. N. — Texte : 2 pages

Concours 1981

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 muni d'un produit scalaire. Le produit scalaire des vecteurs u et v est noté $u.v$ et la norme du vecteur u est notée $\| u \|$.

On désigne par :

$B = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E

$F (E)$ l'ensemble des applications de E dans E

$T (E)$ l'ensemble des applications f de E dans E qui vérifient :

$\forall (u, v) \in E \times E , (u - v).[f (u) - f (v)] = 0$

$\mathcal{L} (E)$ l'ensemble des endomorphismes de E

I - Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère l'application f_a de $F (E)$ qui associe au vecteur $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ le vecteur $f_a (v) = (1 + 3 x_2 - ax_3)e_1 + (2 ax_3 - 3 x_1)e_2 + (2 + ax_1 - a^2x_2)e_3$.

1) Déterminer les valeurs de a pour que $f_a \in T (E)$.

2) On prend $a = 2$

- Démontrer qu'il existe un vecteur w et un endomorphisme g de E tel que $\forall u \in E \quad f_2 (u) = w + g (u)$

  Donner la matrice de g dans la base B

  Déterminer Ker$g$ et Im g

- Démontrer qu'il existe $(n, i) \in$ Ker$g$ x Im g et un nombre réel α tel que $C = (n, i, \alpha g (i))$ soit une base orthonormée de E

  Donner la matrice de g dans la base C

II - 1) Démontrer que T (E) est un sous espace vectoriel de F (E)

2) Soit $f \in \mathcal{L} (E) \cap T (E)$

- Calculer pour $(u, v) \in E \times E$, $u.f(u)$ et $u.f(v) + v.f(u)$
- Calculer $e_i . f(e_j) + e_j . f (e_i)$ pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$

... / ...

3) Soit $f \in F(E)$

- Démontrer que $f \in T(E) \cap \mathcal{L}(E)$ si et seulement si il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que la matrice M de f dans la base B soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Donner la dimension de $T(E) \cap \mathcal{L}(E)$

4) Soit $f \in T(E) \cap \mathcal{L}(E)$ avec f différent de la fonction nulle. Soit $B_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base orthonormée de E. On désigne par

$M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 0 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_1 & 0 \end{pmatrix}$ les matrices de f

dans les bases B et B_1. On pose $R = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ et

$S = \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 + \beta_3 \varepsilon_3$

a) - Démontrer que f est de rang 2
- Calculer $f(R)$ et $f(S)$

b) - Démontrer que

$\forall v \in E \quad (f \circ f)(v) = (R.v)\,R - \|R\|^2 v = (S.v)S - \|S\|^2 v$

- Comparer R et S

III - 1) Soit K (E) l'ensemble des applications constantes de E dans E

- Démontrer que K (E) est un sous espace vectoriel de T (E)
- Donner la dimension de K (E)

2) Soit $f \in T(E)$

On définit l'application φ de F (E) par $\varphi(u) = f(u) - f(0_E)$

où 0_E est le vecteur nul de E

a) démontrer que $\varphi \in T(E)$

b) démontrer que $\forall (u,v) \in E \times E \quad u.\varphi(u) = 0$

$u.\varphi(v) + v.\varphi(u) = 0$

En déduire que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$

c) démontrer que $T(E) \cap \mathcal{L}(E)$ et K (E) sont des sous espaces supplémentaires de T (E)

Donner la dimension de T (E)

N. B. : La question I est indépendante des questions II et III

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail